Derivadas de funciones exponenciales y logaritmicas

Observa las siguientes funciones:

1) $f(x) = x^5$ **2)** $f(x) = 5^x$

¿En qué se diferencian?

La función 1, tiene una base variable (x), pero un exponente constante (5).

La función 2, tiene una base constante (5) y exponente variable (x).

A pesar de que a primera vista ambas parecían muy similares, su comportamiento como veremos a continuación es muy diferente. Analiza la siguiente gráfica:

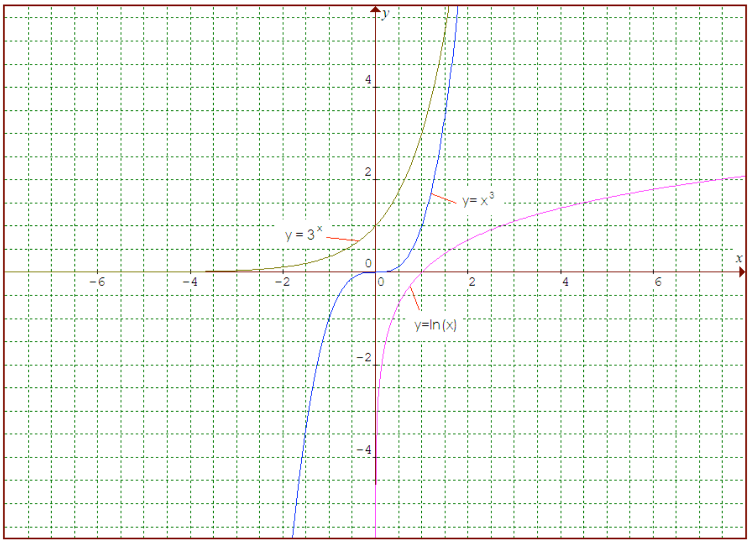
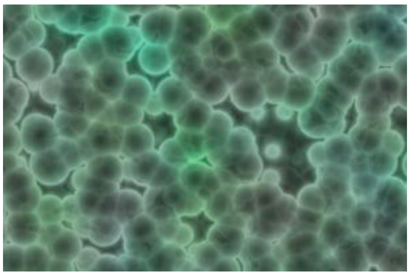


Figura 1. Ejemplo de funciones.

De acuerdo con Elena de Oteyza (2006), el uso más común de las **funciones exponenciales** (como 3^x) es describir fenómenos de crecimiento (como el incremento de la población) o decrecimiento (como la desintegración radioactiva), para lo cual también suele hacerse uso de sus **funciones inversas**, las **funciones logarítmicas** que en la imagen aparece su gráfica en color rosa.



1. Behera, (2008)

En esta lectura estudiaremos los **teoremas de derivación** para ambos tipos de funciones, con la ayuda de la información que se presenta en el siguiente formulario:

CONCEPTO CLAVE

Aunque en esta lectura se estudia la derivada de las **funciones exponenciales** y **logarítmicas**, debido a que para calcular la derivada, con frecuencia se requiere de uso de los teoremas de derivación de **funciones algebraicas** y **trigonométricas**, éstos también se incluyen en esta lectura.

Teoremas de Derivación

Funciones Algebraicas

(1) $\frac{d}{dx}(C)=0$	**(6)** $\frac{d}{dx}(cu)=c\frac{d}{dx}(u)=cu'$
(2) $\frac{d}{dx}(x)=1$	**(7)** $\frac{d}{dx}(uv)=uv'+vu'$
(3) $\frac{d}{dx}(cx)=c\frac{d}{dx}(x)$	**(8)** $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vu'-uv'}{v^2}$
(4) $\frac{d}{dx}(u+v-w)=u'+v'-w'$	**(9)** $\frac{d}{dx}(u)^n=n(u)^{n-1}u'$
(5) $\frac{d}{dx}(x)^n=n(x)^{n-1}$	

Funciones Trigonométricas

Funciones Trigonométricas Directas	Funciones Trigonométricas Inversas
(10) $\frac{d}{dx}(sen\ u)=(\cos\ u)\ u'$	**(16)** $\frac{d}{dx}(arc\ sen\ u)=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
(11) $\frac{d}{dx}(\cos\ u)=(-sen\ u)\ u'$	**(17)** $\frac{d}{dx}(arc\ \cos\ u)=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
d	

APOYO

Leyes de los logaritmos

$$\log(A\cdot B)=\log A+\log B$$

$$\log\left(\frac{A}{B}\right)=\log A-\log B$$

$$\log(A)^n=n\log A$$

$$\log\left(\sqrt[n]{A}\right)=\frac{1}{n}\log A$$

(12) $\frac{d}{dx}(\tan\ u) = (\sec^2 u)\ u'$	**(18)** $\frac{d}{dx}(arc\ \ \tan\ u) = \frac{u'}{1+u^2}$
(13) $\frac{d}{dx}(\cot\ u) = (-\csc^2 u)\ u'$	**(19)** $\frac{d}{dx}(arc\ \ \cot\ u) = -\frac{u'}{1+u^2}$
(14) $\frac{d}{dx}(\sec\ u) = (\tan u\ \ \sec\ u)\ u'$	**(20)** $\frac{d}{dx}(arc\ \ \sec\ u) = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
(15) $\frac{d}{dx}(\csc\ u) = (-\cot\ u\ \ \csc\ u)\ u'$	**(21)** $\frac{d}{dx}(arc\ \ \csc\ u) = -\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

Funciones Exponenciales

(22) $\frac{d}{dx}a^u = \left(a^u \ln a\right) u'$

(23) $\frac{d}{dx}e^u = \left(e^u\right) u'$

Funciones Logarítmicas

(24) $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \left(\frac{\log_a e}{u}\right)\ u' = \frac{u'}{u \ln a}$

(25) $\frac{d}{dx}(\ln u) = \left(\frac{1}{u}\right)\ u' = \frac{u'}{u}$

Derivación de funciones exponenciales

En general, podemos decir que existen dos tipos de **funciones exponenciales**:

- Funciones del tipo $y = a^u$, que utilizan cualquier constante como base. Ejemplos: $y = 5^x$, $y = 10^{2+x}$, $y = 20^{2x}$

- Funciones del tipo $y = e^u$, que describe funciones que utilizan la constante de Euler (e=2.71828…) como base. Ejemplos: $y = e^x$, $y = e^{2+x}$, $y = e^{2x}$

A continuación se te presenta la forma de aplicar los **teoremas de derivación** en cualquiera de las dos situaciones:

Ejemplo 1

Deriva $y = 10^{x^2}$

Solución:

La fórmula a utilizar es la **fórmula 22**, por lo que $a = 10$, $u = x^2$ y $u' = 2x$.

Sustituyendo estos valores en la fórmula se obtiene

$$y' = \frac{d}{dx} 10^{x^2} = \left(10^{x^2} ln 10\right) \cdot 2x = 2x\left(10^{x^2} ln 10\right)$$

Que es el resultado buscado.

Veamos ahora un ejemplo de la **fórmula 23**.

Ejemplo 2

Deriva $y = e^{3x}$

Solución:

La fórmula a utilizar es la **fórmula 23**, por lo que $u = 3x$ y $u' = 3$.

Sustituyendo estos valores en la fórmula se obtiene

$$y' = \frac{d}{dx} e^{3x} = (e^{3x}) \cdot 3 = 3e^{3x}$$

Que es el resultado buscado.

¿Qué te han parecido estos dos ejemplos?, veamos otro ejemplo.

Ejemplo 3

Deriva $y = log_2 5x^3$

Solución:

La fórmula a utilizar es la **fórmula 24**, por lo que $a = 2$ $u = 5x^3$ y $u' = 15x^2$.

Sustituyendo estos valores en la fórmula se obtiene

$$y' = \frac{d}{dx} log_2 5x^3 = \frac{15x^2}{5x^3 ln 2}$$

Que es el resultado buscado.

Calculemos la derivada de una función logarítmica de base e.

Ejemplo 4

Deriva $y = ln(4x^2 - 3)$

Solución:

La fórmula a utilizar es la **fórmula 25**, por lo que $u = 4x^2 - 3$ y $u' = 8x$.

Sustituyendo estos valores en la fórmula se obtiene

$$y' = \frac{d}{dx} ln(4x^2 - 3) = \frac{8x}{4x^2 - 3}$$

Que es el resultado buscado.

En los siguientes ejemplos, se resuelven **derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas** en combinación con **funciones algebraicas y trigonométricas**.

Ejemplo 5

Deriva $y = 3xln(6x^{-2})$

Solución:

La **fórmula** a utilizar es la **7**, en combinación con la **fórmula 25**

$$\frac{d}{dx}(uv) = uv' + vu'$$

$u = 3x \qquad u' = 3$

$v = ln(6x^{-2}) \qquad v' = \frac{-12x^{-3}}{6x^{-2}} = -2x^{-1}$

$$y' = (3x)(-2x^{-1}) + ln(6x^{-2})(3)$$

$$y' = -6 + 3ln(6x^{-2})$$

Ejemplo 6

Deriva $y = e^{5x} ln(x + 1)$

Solución:

La **fórmula** a utilizar es la **7**, en combinación con las **fórmulas 23 y 25**.

$u = e^{5x} \qquad u' = 5e^{5x}$

$$v = ln(x+1) \qquad v' = \frac{1}{x+1}$$

$$y' = (e^{5x})\left(\frac{1}{x+1}\right) + ln(x+1)(5e^{5x})$$

$$y' = \frac{e^{5x}}{x+1} + ln(x+1)(5e^{5x})$$

Ejemplo 7

Deriva $y = \frac{tan\,5x}{7^{2x}}$

Solución:

La **fórmula** a utilizar es la **8**, en combinación con las **fórmulas 12 y 22**.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$u = tan\,5x \qquad u' = 5sec^2 5x$$
$$v = 7^{2x} \qquad v' = 7^{2x}\,ln\,7 \cdot 2$$

$$y' = \frac{(7^{2x})(5sec^2 5x) - (tan\,5x)(7^{2x}\,ln\,7 \cdot 2)}{(7^{2x})^2}$$

$$y' = \frac{(7^{2x})(5sec^2 5x) - (tan\,5x)(7^{2x}\,ln\,7 \cdot 2)}{7^{4x}}$$

Ejemplo 8

Deriva $y = (e^{6x} + ln\,x)^4$

Solución:

La **fórmula** a utilizar es la **9**, en combinación con las **fórmulas 23 y 25**.

$$\frac{d}{dx}(u)^n = n(u)^{n-1}u'$$

$$u = e^{6x} + ln\,x \qquad u' = 6e^{6x} + \frac{1}{x} \qquad n = 4$$

$$y' = 4(e^{6x} + ln\,x)^{4-1} \cdot \left(6e^{6x} + \frac{1}{x}\right)$$

$$y' = 4(e^{6x} + ln\,x)^3 \cdot \left(6e^{6x} + \frac{1}{x}\right)$$

Referencias

Arya, J. y Lardner, R. (2002). *Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía*. México: Pearson Educación.

Cruz Castillo, L.; Prado Pérez, C.; Vallejo Aguirre, F. (2006). *Cálculo diferencial para ingeniería México* [libro en línea]. Pearson Educación. Disponible en http://www.bibliotechnia.com/bibliotechnia20/index.php?option=com_libros&task=preview&id=2541&Itemid=5. Recurso disponible en Biblioteca Digital UVEG.

Fuenlabrada, I. (2001). *Cálculo Diferencial*. México: McGraw-Hill Interamericana.

Edwards, C. (1997). *Cálculo diferencial e integral* [libro en línea]. México: Prentice Hall. Disponible en http://www.bibliotechnia.com/bibliotechnia20/index.php?option=com_libros&task=preview&id=530&Itemid=5. Recurso disponible en Biblioteca Digital UVEG.

Edwards, C. (1996). *Cálculo con geometría analítica* [libro en línea]. México: Prentice Hall. Disponible en http://www.bibliotechnia.com/bibliotechnia20/index.php?option=com_libros&task=preview&id=1432&Itemid=5. Recurso disponible en Biblioteca Digital UVEG.

Purcell, E. (2001). *Cálculo* [libro en línea]. México: Pearson Educación. Disponible en http://www.bibliotechnia.com/bibliotechnia20/index.php?option=com_libros&task=preview&id=1280&Itemid=5. Recurso disponible en la Biblioteca Digital UVEG.

Smith, R. y Minton, R. (2000). *Cálculo*. Colombia: McGraw-Hill.

Behera, Ayanta (2008). *Bacterias* [Fotografía digital]. Recuperada el 17 de agosto de 2010 de http://www.sxc.hu/photo/1066715. Bajo licencia sxc free of charge.